Chapitre 1
Suites numériques

I. Comportement d'une suite

1) Monotonie

Définitions :

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Une suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

Deux méthodes permettent l'étude de la monotonie d'une suite,

- **Méthode algébrique** : elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1}.
  - Soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
  - Soit en comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier naturel $u_n \geqslant 0$.
- **Méthode fonctionnelle** : elle s'applique aux suites définies par une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction).

  Elle consiste à étudier le sens de variation de f sur $[0\ ;+\infty[$.

  Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.

Exemples :

- Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2\,n^2 + n + 5$.

On a :

$$u_{n+1}-u_n=2(n+1)^2+(n+1)+5-(2n^2+n+5)$$

$$u_{n+1}-u_n=2n^2+4n+2+n+1+5-2n^2-n-5$$

$$u_{n+1}-u_n=4n+3$$

$u_{n+1}-u_n>0$ car $n\geqslant 0$, d'où $u_{n+1}>u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

Comme la fonction f définie par $f(x) = 2\,x^2 + x + 5$ sur $\mathbb{R}^+$.

- Soit la suite (v_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$

On a $v_{n+1} - v_n = v_n - 2 - v_n = -2$.

D'où $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n \in$ ℕ. Donc (v_n) est strictement décroissante.

Contrairement à la fonction f définie par : $x \longmapsto x - 2$ qui est croissante sur ℝ.

2) Suites bornées

Définitions :

Soit M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- **majorée** par M si, pour tout $n \in$ ℕ, $u_n \leqslant M$. M est appelé un **majorant** de (u_n).
- **minorée** par m si, pour tout $n \in$ ℕ, $u_n \geqslant m$. m est appelé un **minorant** de (u_n).
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :

- Une suite majorée admet une infinité de majorants.

  En effet, si M est un majorant de (u_n), tous les réels supérieurs à M sont également des majorants de (u_n). De même, une suite minorée admet une infinité de minorants,
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemples :

- Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in$ ℕ*, $\frac{1}{n} > 0$.

  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif.
- Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \geqslant 0$, par $u_n = n^2$. Pour tout $n \in$ ℕ, $n^2 \geqslant 0$.

  Cette suite est donc minorée par 0, qui est, en plus, le **minimum** de la suite, car il est atteint au rang 0.

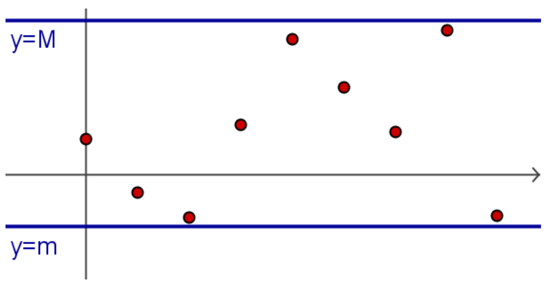
Représentation graphique d'une suite bornée :

- Sur la droite numérique :

  tous les nombres u_n sont compris entre m et M.

- Dans le plan :

  tous les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont situés entre les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.

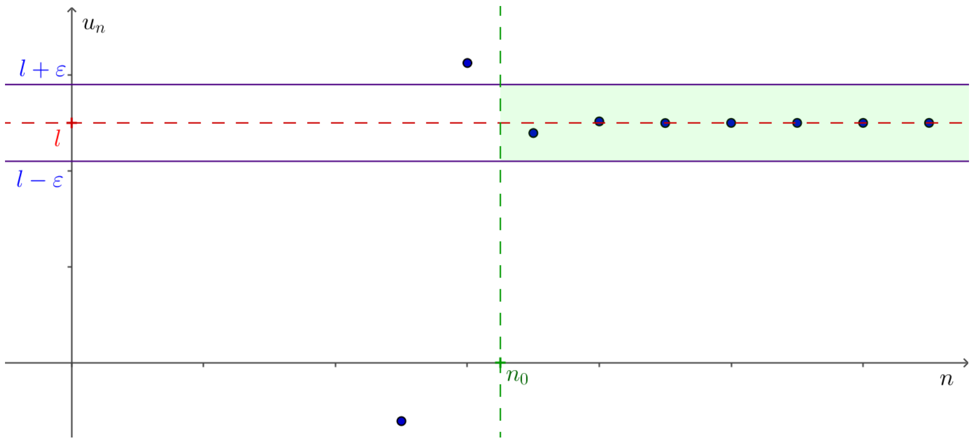


II. Limites finies

1) Définitions et propriétés

Définition :
Soit une suite (u_n) et un réel ℓ .
On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi *petit* soit-il) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0.

Exemple :



La suite (u_n) représentée ci-dessus semble avoir une limite ℓ. Autrement dit, on peut trouver une valeur de n_0 pour laquelle les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de ℓ.

Remarque :
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \text{ soit encore } u_n \in]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon[\text{, soit encore } |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Propriété :
Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$, cette limite est **unique**.

On la note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Définitions :

- Une **suite convergente** est une suite qui a pour limite un nombre réel ℓ .

  On dit aussi que **la suite converge vers** ℓ.

- Une **suite divergente** est une suite qui ne converge pas.

Remarques :

- Si (u_n) converge vers ℓ, les suites (u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergent aussi vers ℓ.
- Une suite convergente est bornée.

2) Limites des suites usuelles

Propriétés :

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les suites $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ convergent vers 0.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

III. Suites divergentes

1) Limite infinie

Définition :

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, l'intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel A, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

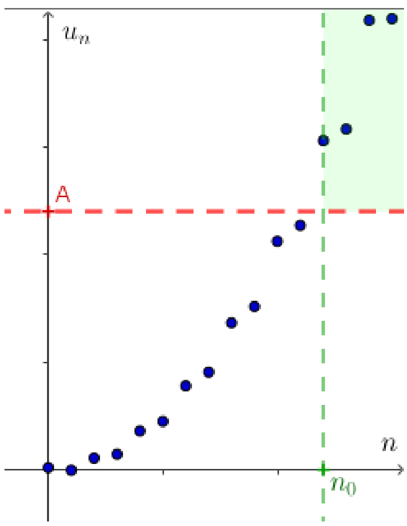
$$u_n \geqslant A.$$

On le note $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple :

La suite (u_n) représentée ci-contre semble avoir pour limite $+\infty$.

En effet pour un réel A choisi, on peut déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes sont supérieurs ou égaux à A.



Remarques :

- Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ on dit que la suite (u_n) **diverge vers** $+\infty$.
- Concrètement, les termes deviennent aussi grands qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
- De la même façon :

  u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0.

  On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Limites des suites usuelles

Propriété :

Les suites $(\sqrt{n})$, (n^2) , (n^3) , … , (n^p) , où $p \in \mathbb{N}^*$, ont pour limite $+\infty$.

2) Suites sans limite

Une suite n'a pas forcément de limite. On dit également qu'elle **diverge**.

Exemples :

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par $u_n=(-1)^n$ est divergente.

  En effet, un intervalle contenant 1 mais pas -1 ne contiendrait qu'un terme sur deux de la suite et ne répondrait donc pas à la définition de la limite d'une suite.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, par $v_n=\sin n$ est divergente.

  En effet les termes de la suite se répartissent uniformément dans l'intervalle $[-1;1]$.

  La suite (v_n) n'a donc pas de limite.

IV. Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Soit ℓ et ℓ' deux réels.

1) Somme de deux suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)=$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Remarque :

Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on dit que l'on a une **forme indéterminée**.

2) Produit de deux suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

3) Quotient de deux suites

On suppose que pour tout entier n, $v_n \neq 0$.

Cas où la suite ***u*** **est positive** à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	0	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	**0**	**On ne peut pas conclure directement**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ **si** $\ell'>0$ $-\infty$ **si** $\ell'<0$	**On ne peut pas conclure directement**

Dans le cas où la suite ***u*** **est négative** à partir d'un certain rang, on construit un tableau analogue en utilisant la règle des signes.

Exemples :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$ et $v_n = n - \sqrt{n}$

- Pour la suite (u_n), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+5) = +\infty$.

  Par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Pour la suite (v_n), on est dans un cas où on ne peut pas conclure directement.

  En effet, on ajoute une suite qui tend vers $+\infty$ ($w_n = n$) à une suite qui tend vers $-\infty$ ($u_n = -\sqrt{n}$).

  En factorisant par n et en simplifiant, on a $v_n = n \times \left(1 - \dfrac{\sqrt{n}}{n}\right) = n \times \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et par quotient puis somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

  Par produit, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

V. Propriétés sur les limites

1) Limite infinie

Propriétés :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

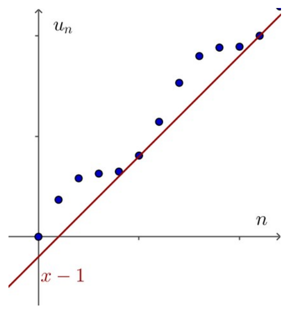
- **Théorème de minoration :**

  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

- **Théorème de majoration :**

  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple :



Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin(n)$.

Pour tout entier n, $\sin(n) \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant n-1$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$, donc d'après le théorème de minoration :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \ .$$

2) Limite finie

Propriétés :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' .

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Exemple :

(u_n) est une suite convergente vers un réel ℓ et, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

D'après la propriété, on peut affirmer que $\ell \leqslant 2$.

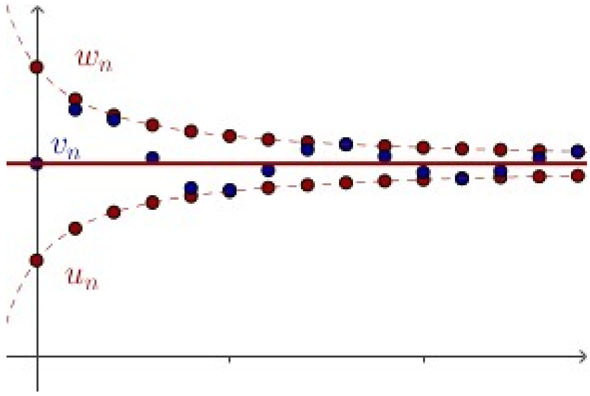
Théorème des gendarmes :

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Soit un entier N et un réel ℓ .

On suppose que pour tout entier $n \geqslant N$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) **converge** également vers ℓ .



Remarques :

- Ce théorème permet de montrer que la suite (v_n) a une limite **et** de connaître cette limite.
- On en déduit que si $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

VI. Suites arithmétiques

1) Rappels

Définition :

Une suite numérique (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre r, appelé **raison** de la suite, tel que pour tout nombre entier naturel n, on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison -5.

Remarque :

Une suite (u_n) est **arithmétique** si, et seulement si, la **variation absolue** entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est **constante.**

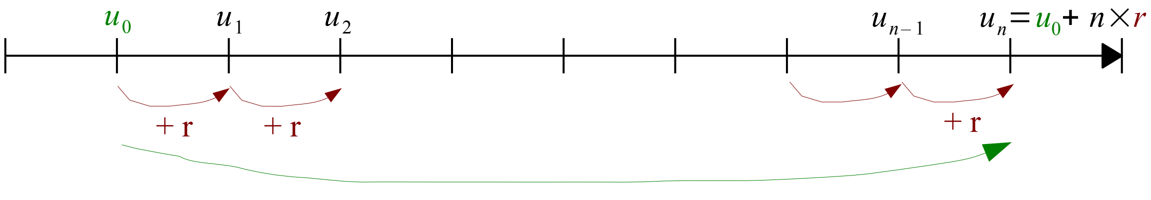
Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.

Remarque :

Terme général en fonction de n : $u_n = u_0 + n \times r$ *(formule explicite)*



Exemple :

Soit la suite arithmétique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$.

Son premier terme est $u_0 = 3$ et sa raison est -5.

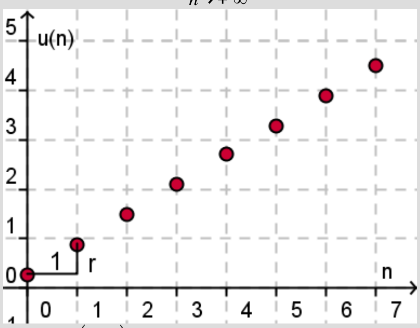
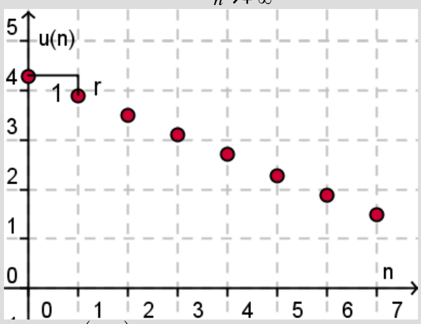
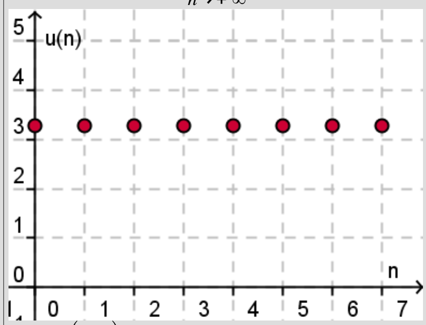
On a, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = 3 + n \times (-5) = 3 - 5n$.

Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le 8^e terme : $u_7 = 3 + 7 \times (-5) = -32$.

2) Limites

Propriété :

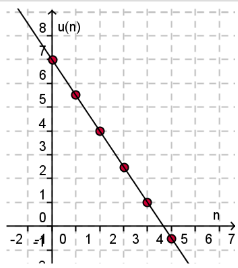
Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$, la suite (u_n) est **croissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	Si $r < 0$, la suite (u_n) est **décroissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	Si $r = 0$, la suite (u_n) est **constante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$
		
(u_n) **diverge** vers $+\infty$	(u_n) **diverge** vers $-\infty$	(u_n) **converge** vers u_0

On dit que les **variations** de la suite sont **linéaires**, car les points de sa représentation se situent sur une droite.

La raison de la suite arithmétique est le coefficient directeur de la droite correspondante, d'équation $y = rx + u_0$.

Exemple :



La suite arithmétique (u_n), de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -1,5, a pour représentation graphique des points situés sur la droite d'équation $y = -1,5x + 7$.

VII. Suite géométrique

1) Rappels

Définition :

Une suite numérique (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q, appelé **raison** de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel n, on ait :

$$u_{n+1}=q\times u_n$$

Exemples :

- La suite définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3u_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 3.
- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.

  Donc chaque année, sa population est multipliée par $1+5\%=1{,}05$.

  Elle suit une progression géométrique de raison 1,05.

Remarque :

Une suite (u_n) est **géométrique** si, et seulement si, le **coefficient multiplicateur** entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou la variation relative $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$) est **constant**.

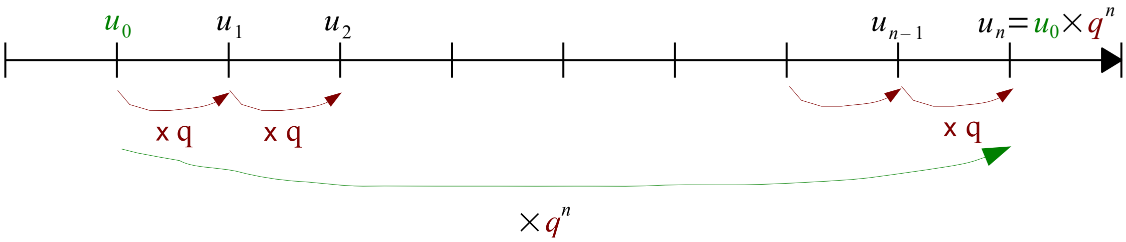
Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Pour tout entier naturel n, on a $u_n=u_0\times q^n$.

Remarque :

Terme général en fonction de n : $u_n=u_0\times q^n$ *(formule explicite)*



Exemples :

- Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=1$ et de raison 3.

  On a, pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\times q^n=1\times 3^n=3^n$.

  Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le terme de rang 5 : $u_4=3^4=81$.

- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.

  Comme vu précédemment, cette population suit une progression géométrique de raison 1,05.

  En notant $u_0=800$ le terme initial de cette suite, on peut déterminer le terme général :

$$u_n=u_0\times q^n=800\times 1{,}05^n$$

  Après 6 années, la ville comptera $u_6=800\times 1{,}05^6\simeq 1072$ habitants.

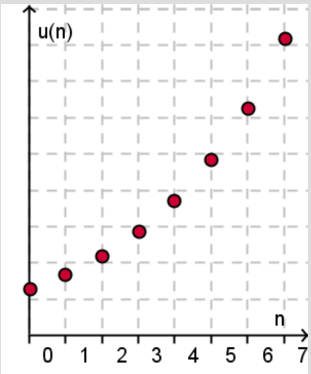
2) Limites

Propriété :

(u_n) est une suite géométrique de premier terme non nul et de raison q.

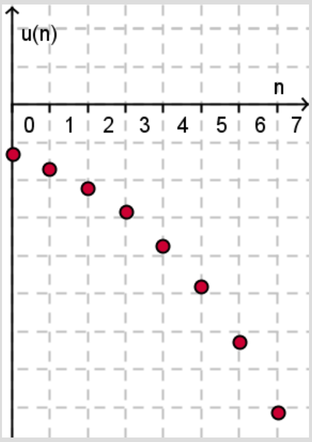
- Si $q>1$

Si $u_0>0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$



(u_n) **diverge** vers +∞

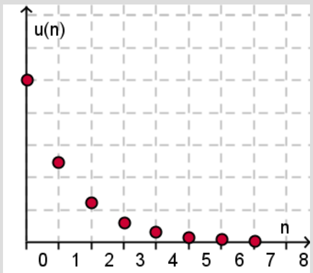
Si $u_0<0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$



(u_n) **diverge** vers -∞

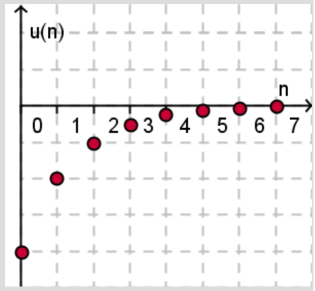
- Si $0<q<1$

Si $u_0>0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$



(u_n) **converge** vers 0

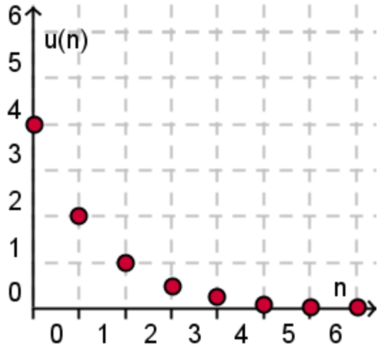
Si $u_0<0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$



(u_n) **converge** vers 0

- Si $q=1$, alors la suite (u_n) est **constante**. Donc (u_n) **converge** vers u_0.
- Si $q=0$, alors la suite (u_n) est **constante** et vaut 0 à partir du second terme.

  Donc (u_n) **converge** vers 0.
- Si $q<0$, alors la suite (u_n) n'a pas de variations régulières.
  - Si $-1<q<0$ alors (u_n) **converge** vers 0.
  - Si $q\leqslant -1$ alors (u_n) **diverge** et n'admet pas de limite.



Exemple :

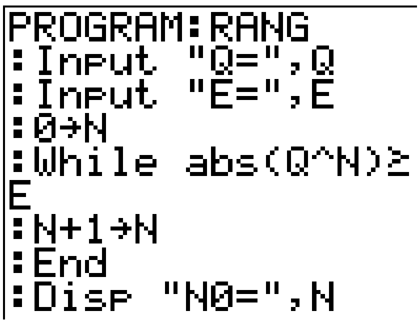
La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=4$ et de raison $\frac{1}{2}$ admet la représentation graphique ci-contre.

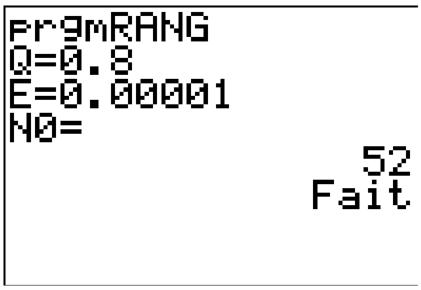
Algorithme :

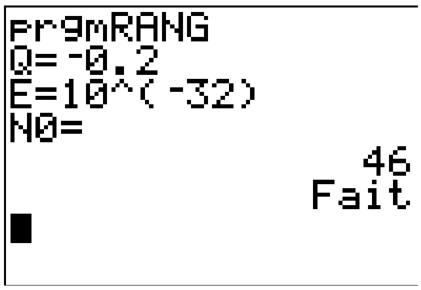
Déterminer le rang à partir duquel $|q^n|<\varepsilon$ pour $|q|<1$

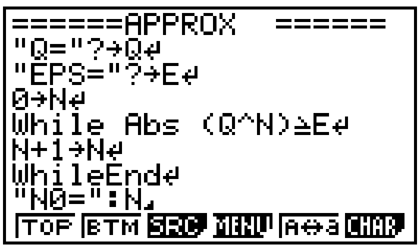
$n \leftarrow 0$
Tant que $|q^n| \geqslant \varepsilon$ faire
    $n \leftarrow n+1$
Fin Tant que

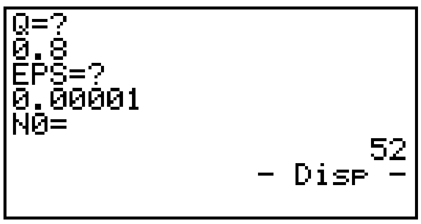
Calculatrice :

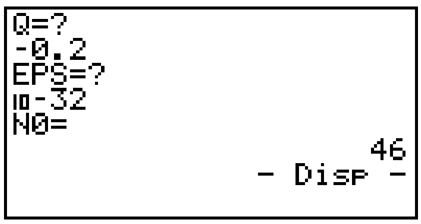












3) Somme des termes

Propriété :

Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison $q \neq 1$.

La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

$$\text{Somme des termes d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q. Donc $u_p = u_{p-1} \times q$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = q(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_{n-1} + qu_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

En soustrayant terme à terme, on obtient :

$$S - qS = u_0 - 0 + u_1 - u_1 + \ldots + u_n - u_n + 0 - u_{n+1}$$

Donc $S - qS = u_0 - u_{n+1} = u_0 - u_0 \times q^{n+1}$

Ainsi $(1 - q)S = u_0(1 - q^{n+1})$ et $S = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Notation :

On utilise la notation suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple :

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.

On peut exprimer la somme des $n + 1$ premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

Et par exemple, pour $n = 10$, $S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 1024 = 2^{11} - 1 = 2047$.

Propriété :

La limite de la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec $0 \leqslant q < 1$, est égale à

$$\frac{u_0}{1-q}$$

Démonstration :

Nous avons vu que $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Puisque $0 \leqslant q < 1$, q^{n+1} a pour limite 0, donc S_n a pour limite $\frac{u_0}{1-q}$.

VIII. Suites arithmético-géométrique

1) Définition

Définition :

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = a u_n + b$, pour tout entier naturel n, où a et b sont des réels fixés.

Exemple :

La suite (u_n), telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}2 u_n + 4$ est une suite arithmético-géométrique.

2) Représentation graphique

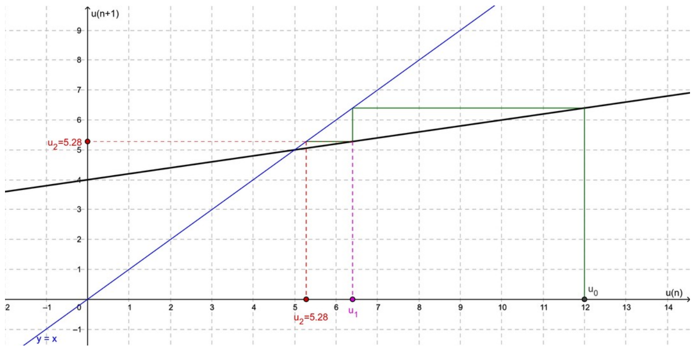
Une suite arithmético-géométrique est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, ou f est la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = a x + b$.

Puisque f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite.

On sait alors représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.

Exemple :

Avec l'exemple ci-dessus, on trace la droite Δ, d'équation $y = 0{,}2 x + 4$ et la droite d, d'équation $y = x$. On place les termes de la suite sur l'axe des abscisses à l'aide de d et Δ.



3) Terme général d'une suite arithmético-géométrique

De la formule de récurrence à la formule explicite

Observons que **si** la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation ℓ =0,2 ℓ +4.

Cette équation a pour solution ℓ = 5.

Cela suggère de poser : pour tout entier naturel *n*, $v_n=u_n-5$.

De $u_{n+1}=0{,}2\,u_n+4$, on déduit : $u_{n+1}-5=0{,}2(u_n-5)$ soit $v_{n+1}=0{,}2\,v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $a=0{,}2$ et de premier terme $v_0=u_0-5=7$.

D'où, pour tout *n*, $v_n=v_0\times a^n$ soit $v_n=7\times 0{,}2^n$. Ainsi $u_n-5=7\times 0{,}2^n$ donc $u_n=7\times 0{,}2^n+5$.

Méthode générale : détermination d'une formule explicite

Une suite numérique (u_n) vérifie $u_{n+1}=a\,u_n+b$, avec $a\neq 1$.

- On résout l'équation ℓ = $a\,\ell+b$: elle a une solution unique *c*.
- On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n=u_n-c$.

  On prouve qu'elle est géométrique (de raison *a*) ; il en résulte que, pour tout entier naturel *n*, $v_n=a^n\times v_0$.
- On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel *n*, $u_n=v_n+c$.

  D'où l'expression : $u_n=a^n(u_0-c)+c$.

4) Étude de la convergence

Sur notre exemple, la raison $a=0{,}2$ est telle que $-1<a<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n=0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$.

Si on applique cette méthode dans le cas général, on obtient le résultat suivant :

Propriété :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_{n+1}=a\,u_n+b$, avec $-1<a<1$.
La suite (u_n) converge vers le nombre ℓ vérifiant ℓ =a ℓ +b.

Remarque :

On démontre que si $a\leqslant -1$ ou $a>1$, la suite est divergente (hormis le cas particulier ou $u_0=c$, auquel cas elle est constante).